“Soli, muretti, regoli e coppie…”. Riflessioni sull’uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: *i numeri in colore*

Silvano Locatello, Gianna Meloni
N.R.D., Bologna

Silvia Sbaragli
N.R.D., Bologna
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

Pubblicato in: Locatello S., Meloni G., Sbaragli S. (2008). “Soli, muretti, regoli e coppie…”. Riflessioni sull’uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno*: i numeri in colore. L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 31A, 5, 455-483.

Sunto. *In questo articolo si descrive un’esperienza didattica condotta in una classe prima primaria sfruttando i regoli Cuisenaire-Gattegno. Questa esperienza diventa occasione per fare alcune riflessioni di didattica della matematica sull’uso a volte acritico che gli insegnanti fanno di materiali didattici strutturati. In particolare, l’uso acritico dei numeri in colore può creare negli allievi misconcezioni riferite al processo di concettualizzazione del numero.*

Summary. *In this article we describe a didactic experience carried out in a first grade primary school class on the use of Cuisenaire-Gattegno slide rules. This experience is an occasion to put forward some mathematics education reflections on the sometimes a-critical use of structured didactic materials on the part of the teachers. In particular, the a-critical use of colour numbers can create in the students misconceptions to the conceptualization process of the number.*

1. Premessa

In questo articolo viene presentata e commentata un’esperienza condotta in una prima primaria dall’insegnante di sostegno che ha gestito alcune lezioni in assenza dell’insegnante di classe. Dopo aver seguito un corso di formazione dove venivano messi in evidenza alcuni limiti sull’uso acritico del materiale strutturato (tra i quali i *numeri in colore*),[1] l’insegnante di sostegno ha condotto le attività come occasione per indagare un po’ più in profondità i possibili rischi dell’uso acritico di questo materiale, facendo emergere alcuni

[1] L’invenzione dei *numeri in colore*, o regoli, si deve ad un insegnante belga, *Georges Cuisenaire*, che li ideò nel 1952. La loro diffusione in Europa e nel mondo avvenne grazie al professor *Caleb Gattegno*, psicologo dell’Università di Londra e all’Unesco, che considerò i regoli un materiale didattico tra i più idonei per l’insegnamento dell’aritmetica.

aspetti dell'apprendimento dei numeri da parte degli allievi ed offrendo degli spunti per riflessioni didattiche con un gruppo di studio di docenti della medesima scuola.
La scelta dell'insegnante di sostegno è legata anche al fatto che di solito non effettua lezioni per l'intera classe e non valuta le prestazioni degli allievi e questo ha consentito di indagare più in profondità le convinzioni personali degli allievi e alcuni effetti del contratto didattico normalmente instaurati in classe con l'insegnante titolare.
L'insegnante di sostegno ha sollecitato quindi una discussione in classe tra gli allievi, avente come oggetto le modalità del loro lavoro quotidiano con questo sussidio, allo scopo di mettere in luce (con le interviste raccolte) eventuali misconcezioni[2] ed ostacoli presenti nel gioco di rappresentazioni proposto usando questo materiale.
Inoltre, per favorire il piacere della discussione e tenere viva l'attenzione per lungo tempo su quanto veniva detto od esposto alla lavagna,[3] l'insegnante di sostegno ha attivato delle tecniche di animazione (gestualità, azioni simboliche, far finta di…, frasi con non senso, metafore ecc.) adatte all'età degli allievi di prima primaria.

2. Il quadro teorico dell'esperienza

L'uso di materiale didattico ai fini dell'insegnamento della matematica rientra nel campo di studio e sperimentazione che prende il nome di *ingegneria didattica* (si veda Brousseau, 2000).
Per capire in quale settore della didattica della matematica si sta operando con queste riflessioni, è necessario fare alcune precisazioni sulle tipologie di ricerca in didattica della matematica. A tal proposito Bruno D'Amore (1999, pag. 34) introduce «un duplice modo di vedere la didattica della matematica:
A: come divulgazione delle idee, fissando dunque l'attenzione sulla fase dell'insegnamento (**A** qui sta per **A**rs);
B: come ricerca empirica, fissando l'attenzione sulla fase dell'apprendimento (*epistemologia dell'apprendimento della matematica*)».
A queste due tipologie lo stesso aggiunge una terza categoria (D'Amore, 2006a):
C: come *epistemologia dell'insegnante*, la sua formazione, le sue convinzioni, il suo ruolo.
Questa distinzione operata fin dagli anni '80 ha lo scopo di organizzare e diffondere una visione della didattica della matematica con un senso, sia per lo

[2] Diamo a questo termine l'interpretazione costruttiva presentata in D'Amore e Sbaragli (2005): «concezione momentaneamente non corretta, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica» e in Sbaragli (2005).
[3] Le attività di discussione e di domanda e risposta scritta, sono state svolte in moduli orari di due ore la mattina e tre ore il pomeriggio.

studioso sia per chi ha come compito quello di sfruttarne i risultati concreti da portare in aula.
L'uso di materiali didattici rientra generalmente, come spirito, nella prima grande tipologia (didattica A), nella quale l'intervento del didatta è orientato a trasformare un discorso specialistico (e dunque complesso in quanto fa uso di un linguaggio tecnico) in uno comprensibile e più consono alla natura dell'allievo. In questo caso l'azione didattica non è tanto focalizzata sull'apprendimento dell'allievo, quanto soprattutto sull'argomento posto in gioco, quindi sull'insegnamento della matematica. L'obiettivo principale di questo tipo di didattica è creare situazioni (sotto forma di lezioni, attività, oggetti, ambienti, giochi, ...) per un insegnamento *migliore* della matematica. L'assunto più o meno esplicito sembra essere il seguente: se migliora l'insegnamento, migliorerà anche l'apprendimento, e la validità di questo assunto è data per scontata.
Questo tipo di didattica ha dato risultati significativi soprattutto tra gli anni '60 ed i primissimi '80, specialmente se commisurati a quel momento storico; basta ricordare personaggi come Dienes, Castelnuovo o Montessori che proponevano attività tese all'insegnamento della matematica in modo attivo, creativo e piacevole, con significativi esempi di applicazione concreta di concetti matematici (Dienes, 1970, 1972, 1975a, 1975b; Castelnuovo, 1950, 1982; Montessori, 1971). Nella scuola primaria sono ancora molto diffuse attività che risalgono a quel periodo come i *numeri in colore* (di Caleb Gattegno [1911-1988]), la *bilancia numerica*, *l'abaco multibase*, il *minicomputer di Papy*, il *geopiano* ecc., e l'elenco potrebbe continuare ancora, per descrivere tutta una serie di attività e strumenti con i quali l'insegnante dovrebbe progettare una sequenza di unità di lavoro dal semplice al complesso in ambienti artificiali ideati su misura per certi insegnamenti specifici.
In questi ambienti, gli allievi manipolano "materiale strutturato" in modo attivo e piacevole, in una situazione di forte interazione e dialogo fra allievi e fra questi e l'insegnante.
Molto spesso, però, questi ambienti artificiali (strumenti e materiale strutturato) risultavano fini a sé stessi e portavano esclusivamente ad un apprendimento epidermico.
Nel senso che, come è sostenuto in D'Amore (1999), facendo uso di questi strumenti, raramente avviene che l'allievo posto di fronte ad un problema dello stesso tipo, ma in ambiente diverso, sia capace di *trasferire* il sapere da una situazione all'altra, in modo naturale, implicito, spontaneo, *senza richieste cognitive specifiche per la nuova situazione di apprendimento*. Ossia, il fenomeno del *transfer cognitivo* (su questo argomento si veda Ausubel, 1978) non avviene in modo automatico: da una conoscenza "artificiale" costruita su misura in un ambiente opportuno e specifico, alla conoscenza generalizzata, cioè alla capacità di produrre abilità cognitive e procedurali in altre situazioni (si veda anche Gagné, 1989). Le capacità cognitive e procedurali restano

spesso ancorate all'àmbito nel quale si sono raggiunte: non si sa *trasferire* la conoscenza, se non in casi particolari.
Si capì che l'idea didattica che aveva sempre dominato «Se insegnerete bene i vostri allievi apprenderanno», non solo era ingenua, ma falsa, una pura illusione: «L'insegnamento, come semplice processo di istruzione, appesantito da ipotesi sulla capacità dello studente di assorbire quel che gli si dice "bene", non è una concezione: è un'illusione» (Moreno Armella, 1999).
Per queste ragioni la didattica della matematica è passata ad una nuova fase, chiamata "B", dove il focus della ricerca sta nell'individuazione delle caratteristiche peculiari dell'apprendimento. In questo àmbito di ricerca si studiano in modo approfondito le caratteristiche, le condizioni e le modalità della costruzione delle conoscenze matematiche dell'allievo, nel senso di un'articolazione della didattica disciplinare matematica intesa come *epistemologia dell'apprendimento della matematica*.
Fu il lavoro da pioniere di Guy Brousseau a dare una nuova dimensione della didattica della matematica; negli anni '60, mentre tutti enfatizzavano la *New Mathematics*, la *Mathématique Moderne*, lui già ne vedeva i difetti, denunciando diversi effetti negativi che essa produceva.
Già verso la fine degli anni '70, propose al mondo della ricerca in didattica della matematica l'idea di *contratto didattico* che, attraverso la successiva pubblicazione di tre studi (Brousseau, 1980a; 1980b; Brousseau, Pères, 1981), diventò uno dei concetti fondamentali della didattica della matematica. Brousseau definisce il *contratto didattico* come «l'insieme dei comportamenti (specifici [delle conoscenze insegnate]) del maestro che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dal maestro» (Sarrazy, 1998, pag. 135).
Un'altra chiave di lettura rientrante nel campo della didattica della matematica e fondamentale per la nostra trattazione, riguarda la problematica delle rappresentazioni dei concetti e degli *oggetti* della matematica. In particolare, si tratta dello studio delle diverse rappresentazioni dei concetti matematici per mezzo di vari registri semiotici e delle loro relazioni con il funzionamento cognitivo (si veda Duval, 1993; 2006b).[4]
Infatti, l'acquisizione concettuale di un *oggetto matematico* avviene necessariamente mediante l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche.
Come afferma D'Amore (2001, pag. 343): «La costruzione dei concetti matematici è dunque strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti:
1) di *rappresentarli* in un dato registro;
2) di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;
3) di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro».

[4] Quando in Duval (e dunque qui) si parla di "registro di rappresentazione semiotica" ci si riferisce ad un sistema di segni che permette di compiere le funzioni di comunicazione, trattamento, conversione e di oggettivazione.

Tale studio è da molti Autori considerato il punto più importante e delicato dell'apprendimento concettuale in matematica.
A questo proposito fondamentale è l'idea espressa nel *paradosso di Duval*: «…da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche» (Duval, 1993, pag. 38). Questa idea è sintetizzata da Radford (2005) nel seguente modo: «Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?»
Per questo la ricerca attuale in didattica della matematica mette in evidenza l'importanza di fare molta attenzione alla scelta ed alle modalità d'uso dei *segni* che rappresentano *l'oggetto matematico* che si vuole fare apprendere agli allievi, un'attenzione che però è spesso sottovalutata come vedremo in questa trattazione.

3. L'esperienza con i *numeri in colore*

Descriveremo ed analizzeremo in senso critico le fasi più significative dell'esperienza condotta con i *numeri in colore* partendo dalle riflessioni del quadro teorico.

3.1 Le numerose rappresentazioni semiotiche

Osservando in modo puntuale come si è svolta l'esperienza in classe con l'uso dei *numeri in colore* troviamo che «alla relazione formale usuale nella didattica: numero (oggetto/concetto astratto) → numerale (nome del numero, espresso in forma orale e scritta) si aggiungono due nuovi formalismi: colore e lunghezza. Ne risulta una trasformazione di registri semiotici un po' complessa» (D'Amore, 2002a, pag. 15), infatti si possono osservare:

un oggetto matematico: il numero,
un registro semiotico: la lingua naturale,

con la rappresentazione semiotica: orale,
e la rappresentazione semiotica: scritta,
un altro registro semiotico: la lingua aritmetica,
con la rappresentazione semiotica: scrittura in cifre,
un altro registro semiotico: il colore,
con la rappresentazione semiotica: regoli di diverso colore,
un altro registro semiotico: la grandezza,
con la rappresentazione semiotica: regoli di diverse dimensioni,
un altro registro semiotico: il disegno,
con la rappresentazione semiotica: disegno dei regoli, delle coppie, degli schemi (*a sole*),
ecc.

Quindi, nella usuale pratica di lavoro didattico con i regoli, ad ogni singolo numero, per esempio il "7", corrispondono almeno 6 rappresentazioni semiotiche:

1. il suono "sette" e la scrittura "sette" all'interno dei registri: orale e scritto,
2. la scrittura 7,
3. un determinato colore,
4. una determinata grandezza,
5. il disegno del regolo,
6. varie rappresentazioni iconiche.

VII ●●●
●●●
● **|||||||** ...

L'eccessiva presenza di rappresentazioni, alcune delle quali incentrate su proprietà non caratteristiche del concetto "numero", come il colore e la grandezza, fan sì che si crei una complessa e macchinosa messa in scena di registri per una competenza che potrebbe essere costruita in modo più spontaneo.
La scelta dei *segni* (*numeri in colore*) per rappresentare *l'oggetto matematico* (numeri), non è neutra o indipendente; essa segna il destino in cui si esprime il pensiero, il destino della comunicazione. Come sostiene D'Amore (2006b, pag. 580): «Senza dubbio, l'uso di diverse rappresentazioni e la sua progressiva articolazione arricchisce il significato, la conoscenza, la comprensione dell'oggetto, ma anche la sua complessità. L'oggetto matematico si presenta, in un certo senso, come unico, ma, in un altro senso, come molteplice», soprattutto se tali rappresentazioni vertono su proprietà non relative al concetto che si sta presentando.
Passando alla esperienza realizzata in classe, proponiamo di seguito alcune risposte fornite dagli allievi durante la discussione.

Insegnante: «Perché prima ho scritto 7 e 0 e adesso 2 e 5?»
Valeria: «Perché è il 7»
Insegnante: «Ah! È il 7. Ma 7 cosa?»
Marta: «Il regolo nero»
Insegnante: «Il regolo nero è il 7?»
Classe: «Sì!»
Insegnante: «Prendiamo le scatole dei regoli... Marta, dammi 7…»
Marta: «Ecco» (consegna il regolo nero)
Insegnante: (lo guarda, lo gira, lo rigira) «… Ma perché me ne hai dato uno solo?»
Marta: «Perché quello è il nero, è il 7»
Insegnante: «Questo è 7?» (Lo guarda, lo gira, rigira…) «Ma io non vedo niente di 7, mi hai dato solo un pezzo di plastica nero… Io ti avevo chiesto 7 e tu mi hai dato un pezzo solo»
Valeria: «Ma quello è il 7!»
Classe: «È il 7»

Come si osserva dalla discussione, con un uso acritico dei regoli gli allievi possono venire spinti a fare una forte associazione tra un numero (rappresentazione semiotica: orale e scritta) e una rappresentazione (il regolo) concentrandosi soprattutto sulla caratteristica del colore (rappresentazione semiotica: regoli di diverso colore). Il concetto può quindi venire confuso con lo strumento utilizzato per parlarne.
Lo stesso capita nelle cifre: 7 è per molti "il sette".
Come sostengono Martini e Sbaragli (2005, pag. 110) parlando del paradosso cognitivo di Duval (1993) presentato nel quadro teorico: «…c'è un apprendimento concettuale da raggiungere. L'insegnante (*che conosce il concetto*) propone allo studente, (*che non conosce il concetto*) delle sue rappresentazioni semiotiche. Nell'intenzione dell'insegnante c'è la volontà, la speranza, il desiderio che, attraverso le rappresentazioni semiotiche, lo studente costruisca l'apprendimento concettuale (noetica di quel concetto). Ma tra le mani dello studente ci sono solo rappresentazioni semiotiche, oggetti, parole, formule, disegni, schemi, … ma non il concetto in sé. Se lo studente conoscesse il concetto, potrebbe *riconoscere in quelle* rappresentazioni semiotiche il concetto; ma non conoscendo il concetto, *vede solo delle* rappresentazioni semiotiche, cioè oggetti concreti».
Nel caso dei *numeri in colore* accade che l'insegnante propone agli allievi delle diverse rappresentazioni semiotiche del numero attraverso le caratteristiche più evidenti del colore (che chiaramente poco c'entra con la quantità) e della misura (che poco c'entra con la cardinalità). Ma tutte queste informazioni percettive, che nel contesto della matematica sono avvertite come "parassite", potrebbero essere invece quelle considerate dall'allievo come caratterizzanti il concetto del quale si sta parlando, essendo più percepibili ed immediate.

Inoltre, la ricerca in didattica della matematica (si veda ad esempio AA. VV., 2004; D'Amore, 2007a) ha più volte confermato che allievi di classe prima generalmente sanno già contare, trattare ed eseguire semplici operazioni, anche con numeri a più cifre (con i regoli si opera di solito con i numeri dall'1 al 10) (Marazzani, 2007). Quindi, l'aggiunta di rappresentazioni nuove, addirittura innaturali (che cosa c'entrano i numeri con i colori e la grandezza?), su un argomento già in fase di formazione non può certo aiutare chi sa già, ma solo confondergli le idee; né può aiutare chi non sa dato che, con molta probabilità, chi non sa, non sa proprio per confusione di registri semiotici.

Insegnante: «Ma se ne vedo uno solo, perché dite che è 7?»
Gaia: «Perché vedi? (Prende un regolo arancione con scritto in sequenza i numeri da 1 a 10, lo avvicina al regolo nero) vedi? È 7! Arriva fino qua! 7!»
Insegnante: «Ah! È lungo fino al 7! Allora devo avere sempre con me questo regolo arancione con tutti questi numeri, per sapere quanto valgono i regoli…»
Gaia: «Sì!»

Dall'esperienza realizzata emerge inoltre che quegli allievi sanno operare con i numeri se hanno come interlocutore i *numeri in colore*. Spesso, in effetti, usando troppo i materiali strutturati si rischia di allontanarsi dall'obiettivo cognitivo, ossia dal contenuto che si sta trattando, centrando l'attenzione esclusivamente sulla specifica rappresentazione semiotica (i *numeri in colore*) piuttosto che sulla noetica (il concetto numerico). Capita spesso all'insegnante di non accorgersi di questo, perché troppo coinvolto e assorto sull'uso dello specifico sussidio che sta sfruttando.
Inoltre, la trasformazione semiotica di *conversione* (cambiamento di registro di rappresentazione) che, come osserva Duval, è la trasformazione più importante per l'acquisizione del concetto ma allo stesso tempo la più difficile per gli allievi, viene fortemente limitata da un materiale così strutturato che si fonda principalmente su fattori percettivi. Duval afferma: «Le difficoltà nel passaggio da una rappresentazione in un registro ad una rappresentazione in un altro registro rivelano la complessità, troppo spesso sottostimata, dell'articolazione tra i registri di rappresentazione utilizzati in matematica» (Duval, 2006, pag. 587).
In effetti, gli allievi imparano a limitare le loro azioni e le loro risposte rimanendo all'interno delle regole e degli schemi del gioco dei *numeri in colore*, evitando di compiere vere e proprie conversioni. Questo è avvenuto a causa di un uso massiccio e acritico di questo materiale, senza averne mai messo in dubbio la sua efficacia e senza aver basato le attività su differenti esperienze come per esempio quelle del quotidiano.
Presentiamo alcuni protocolli degli allievi, scritti dopo la fase della discussione dove emerge questo richiamo continuo al materiale. (Da una domanda iniziale scritta, a seconda della risposta dell'allievo, l'insegnante di

sostegno rilanciava le idee degli allievi con ulteriori domande, sempre per iscritto).

Insegnante: «A cosa servono i regoli?»
Gianluca: «Per imparare i numeri»
Insegnante: «Che cosa dei numeri?»
Gianluca: «Per imparare regoli»
Insegnante: «Cosa c'entra il regolo con il numero?»
Gianluca: «Perché regoli sono muretti che sono i numeri»

Insegnante: «A cosa servono i regoli?»
Valeria: «A fare le piramidi e a imparare a contare e a fare i muretti e a fare le copie»
Insegnante: «Cosa sono i muretti?»
Valeria: «Sono dei regoli uno sopra l'altro»
Insegnante: «Cosa servono?»
Valeria: «Servono per imparare a memoria il muretto del 2 del 3 del 4 del 5 del 6 del 7 del 8 del 9 e del 10»

Insegnante: «A cosa servono i regoli?»
Michela: «Per imparare a fare i muretti»
Insegnante: «Cosa impari con i muretti?»
Michela: «I numeri»
Insegnante: «Come?»
Michela: «In riga però e anche in copia»
Insegnante: «Come in riga?»
Michela: «Orizzontale»

3.2 A misura viene associata quantità

Abbiamo osservato come il fattore colore, che poco ha a che vedere con la rappresentazione del valore numerico e con la concettualizzazione del numero, sia un elemento determinante quando si fa uso di questo materiale. Inoltre, come è già stato messo in evidenza nel paragrafo precedente, i regoli Cuisenaire-Gattegno hanno anche un'altra variabile oltre al colore che può portare a misconcezioni: la grandezza.

Questo materiale si basa su un'unità di misura presa come riferimento: il cubetto bianco di un dato volume e chiamato l'"1", dal quale si ottengono i numeri successivi 2, 3, 4, … fino a 10, associando tali numeri a parallelepipedi i cui volumi sono rispettivamente: doppio, triplo, … rispetto a quello considerato come unità di misura e che dovrebbe sempre essere considerato come riferimento.

Il parallelepipedo di valore "2" ha quindi volume doppio rispetto al cubetto che rappresenta l'unità di misura, ma ad esempio non ha l'area totale doppia. In effetti, il cubetto-unità di misura ha area 6 quadrati (che coincidono con le

sue facce) e il parallelepipedo chiamato "2" ha area 10 quadrati, che non rappresenta quindi il doppio dell'area del cubetto. Questo comporta che quando in classe l'insegnante afferma che quel parallelepipedo rappresenta il "2", dovrebbe non dimenticare di far osservare agli allievi i seguenti importanti aspetti:
- quel particolare parallelepipedo rappresenta il "2" se si considera il volume, ma non ad esempio se si considera l'area totale, quindi andrebbe esplicitata la caratteristica che si sta considerando, ma questa importante e necessaria riflessione adulta può essere difficile da essere compresa da allievi dei primi anni di scuola primaria;
- quel parallelepipedo rappresenta il "2" (secondo il volume) rispetto al cubetto preso come unità di misura, che andrebbe sempre considerato come termine di paragone, evitando di considerare il parallelepipedo come "2" in sé;
- sarebbe importante far notare che quel parallelepipedo è il "2" (secondo il volume) se si considera quel cubetto, ma se si prende un'altra un'unità di misura quel parallelepipedo potrebbe diventare il "20", il "100", il "1000", …

Riprendiamo uno stralcio di conversazione già riportata in precedenza dove viene esplicitata questa ambiguità di ritenere ciascun parallelepipedo un numero in sé senza far riferimento all'unità di misura:

Insegnante: «Prendiamo le scatole dei regoli...»
Marta: «Ecco il 7» (consegna il regolo nero)
Insegnante: (lo guarda lo gira, lo rigira) «Ma perché me ne hai dato uno solo?»
Marta: «Perché quello è il nero, è il 7»

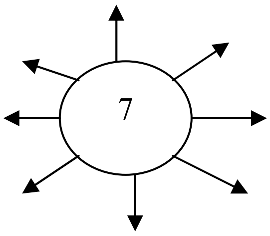
Come risulta dalle discussioni avvenute in classe in diverse occasioni, agli allievi non viene fatta notare la relazione in base al volume che collega un regolo con un altro, ma viene esplicitato che ognuno di questi parallelepipedi rappresenta un numero; numero che al massimo viene fatto rintracciare tramite una tacca sul regolo di riferimento.
Lavorando in questo modo, quel particolare parallelepipedo nero è per gli allievi il "sette" e non potrebbe essere per esempio il "dieci", il "cento" o il "mille" a seconda della unità di misura che si considera. Questa mancata esplicitazione didattica potrebbe derivare dal fatto che la classe prima non si presta a trattare questi sofisticati concetti, ma allo stesso tempo dimostra come i *numeri in colore* sono materiali complessi e difficili da essere proposti correttamente e che, se mal usati e interpretati, potrebbero creare misconcezioni negli allievi.
Facendo uso di questo materiale, si dà risalto all'aspetto percettivo che risulta immediato, dato che è facile osservare la diversità di grandezza di due regoli ai quali sono associati valori numerici diversi; in questo modo si insinua però il rischio assai pericoloso di radicare il valore del numero alla misura. Così la colonna più "alta" diventa per gli allievi sempre più numerosa della colonna più "bassa". «Chi usa i *numeri in colore* si fa gran vanto della seguente

attività: si dispone in verticale il regolo 2 accanto al regolo 5 e si insegna che 5 è più grande di 2; questa "scoperta" è suffragata dall'immagine visiva: il 5 è infatti percettibilmente più alto. Il bambino si convince allora che "maggiore" in matematica è sinonimo di "più grande, più alto, più grosso" e simili, con la conseguenza che non sarà più possibile paragonare numeri che indicano cardinalità di differenti specie di oggetti. Se mettiamo in verticale 5 ciliege e 2 elefanti, qual è la colonna, il mucchio, il risultato "più grande"? Con questa confusione tra numerico astratto e quantità, la risposta è ovvia. Ecco l'origine di un altro ostacolo (didattico!)» (D'Amore, 2002a, pag. 16).
Il rischio di creare negli allievi «confusione tra numerico astratto e quantità» è molto alto quando si fa uso dei regoli, dove si opera sempre con la stessa specie di oggetti che hanno proporzionalità tra misura e valore numerico: «Il 7 è più grande del 6, perché è più alto» (il "grande" viene inteso come grandezza e non come numerosità).
Come sostiene D'Amore, si crea così un ostacolo didattico: l'uso di materiale strutturato, che abitua gli allievi a fondare le loro risposte e le loro azioni in base a delle caratteristiche percettive (in questo caso la diversa grandezza dei regoli), non li sollecita a fare delle costruzioni concettuali numeriche non condizionate dalle caratteristiche degli oggetti.
È evidente il rischio di creare confusione nel processo di concettualizzazione dell'allievo, specie poi se questo ha di per sé dei disturbi o delle difficoltà di apprendimento (eppure, i *numeri in colore* sono un materiale didattico assai diffuso, sia nella scuola primaria che nella scuola secondaria, per l'insegnamento ad allievi con bisogni educativi e didattici speciali). Quindi, se insegnare significa anche facilitare e rendere possibile l'apprendimento, risulta chiaro che in questo caso si pongono degli ostacoli di natura didattica all'apprendimento, ostacoli che un insegnante dovrebbe evitare.

3.3 Composizione e scomposizione additiva

È poi molto frequente far svolgere agli allievi l'attività di composizione-scomposizione additiva. Si dispone per esempio sul banco il regolo "di valore 7" e su di esso poi tutte le varie coppie additive, costruendo quello che si suole chiamare muretto, cioè si dispongono tutte quelle coppie di regoli la cui somma è appunto 7. Nell'esperienza condotta con gli allievi di classe prima, la rappresentazione delle coppie additive era arrivata alla fase del disegno dello *schema a sole* (fase seguente al lavoro manipolativo con i muretti), intesa di solito dall'insegnante come espediente didattico per passare da una rappresentazione manipolativa ad una successiva ritenuta più "formale".
Presentiamo altre risposte tratte dalla discussione.

Insegnante (alla lavagna): «La maestra mi ha detto di fare questo disegno. Cosa significa?» (Disegno che l'insegnante di classe aveva già proposto per i numeri 2, 3, 4, 5 e 6)



Lucia: «È il sole del 7»
Insegnante: (va verso la finestra, guarda il cielo…)
Lucia: «No! Non il sole! È tipo il sole! Ha un cerchio con tante frecce e allora si chiama così»
(…)
Insegnante: «Allora torniamo al nostro sole… Adesso cosa devo scrivere su questa freccia?»
Valeria: «5 e 2»
Insegnante: «E dopo?»
Valeria: «6 e 1, 1 e 6, 3 e 4, 4 e 3, 7 e 0, 0 e 7»
Insegnante: «… 0 e 7. Così?»
Classe: «Sì!»
Insegnante: «Perché mi avete fatto scrivere 7 e 0 e poi ancora 0 e 7? Non è lo stesso?»
Mario: «Perché bisogna scrivere i numeri come se fosse il muretto!»
Insegnante: «Il muretto?» (Guarda e tocca un muro della stanza)
Mario: «Il muretto del 7! No il muro!»
Insegnante: «Il muretto del 7? E cos'è?»
Mario: «Che sono i numeri scritti così!» (Indica 7 e 0, 2 e 5, 5 e 2…)
Insegnante: «E perché scrivete questi numeri così?»
Gaia: «Perché ce l'ha detto la maestra!»
Insegnante: «Ah! E a cosa serve?»
Gaia: «Non lo so cosa serve! Ce l'ha detto la maestra!»
Insegnante: «Perché scrivete 0 e 7 e poi 7 e 0?»
Mario: «Perché si scrive così nei muretti. Si inizia sempre da 7 e 0»
Marta: «Sì! Come 5 e 0, 6 e 0, 7 e 0…»
Classe: «Sì! Sempre così!»
Valeria: «Ma 1 e 0 non si può fare!»
Insegnante: «Ah! 1 e 0 non si può fare! Perché?»
Marta: «Si fa 2 e 0, 3 e 0, 4 e 0, ma no 1»
Insegnante: «Perché?»
Marta: «Perché l'ha detto la maestra!»

Se anche in questo caso ci si avvale dell'intuizione percettiva visiva per rappresentare una scomposizione additiva, risulta al contrario molto difficile intuire visivamente che ci sono anche le coppie 0+7 e 7+0. Ma non solo, si radica nel processo di concettualizzazione numerica dell'allievo l'idea che lo zero è nulla, vuoto, invisibile, in quanto appunto non visibile.

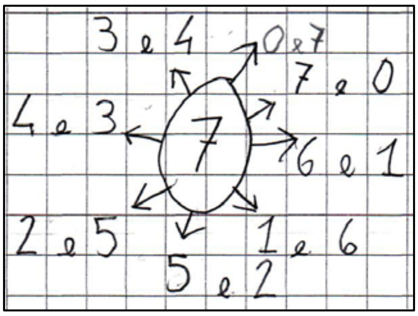
Insegnante: «Ho capito. Adesso mi spiegate perché scrivete 7 e 0, e 0 e 7?»
Valeria: «È come un numero solo!»
Insegnante: «Un numero solo?»
Valeria: «È come solo il nero, è come solo il 7. Perché lo 0 non ha niente, non fa niente»

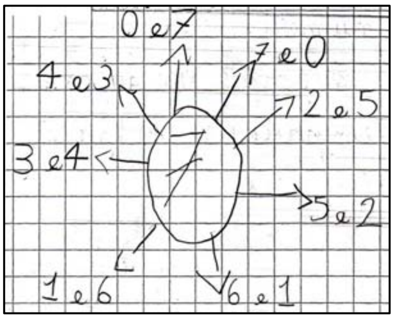
Se lo zero diventa sinonimo di vuoto, di assenza, di nulla, come molti insegnanti auspicano e loro stessi suggeriscono, allora anche in questo caso si rischia di provocare la costruzione di un modello che, successivamente, farà da ostacolo didattico all'apprendimento del concetto; concetto, quello dello zero, che di per sé è già un ostacolo epistemologico ma che è già presente e spontaneo in bambini fra i tre ed i sei anni, sia come cifra che come cardinale (D'Amore, 2007b). In quest'ultimo articolo l'Autore ipotizza che all'origine delle difficoltà apprenditive di zero ci siano anche ostacoli didattici, creati dalla tendenza diffusa di evitare un'introduzione spontanea di tale concetto, basata sull'esperienza già esperita dai bambini di quella età. Non è dunque lo zero in sé a costituire ostacolo, ma le convinzioni pseudo-didattiche al riguardo.

3.4 Il contratto didattico

In questa sperimentazione gli allievi dimostrano che il loro sforzo nell'azione ad apprendere sia rivolto soprattutto nel saper riprodurre e ricostruire fedelmente lo schema secondo il modello che l'insegnante ha proposto e non secondo una personale scelta e interpretazione. Infatti, alla domanda dell'insegnante sul significato dello schema *a sole,* gli allievi rispondono parlando di coppie di addendi che formano il sette con un'impostazione vincolante e senza comprensione delle motivazioni che stanno alla base di tale esperienza.

Insegnante: «A cosa serve?»
Marta: «Che c'è un numero 7, fai un 7 su una freccia, dopo c'è una "e" piccolina in mezzo e dopo uno 0 dietro»
Insegnante (scrive un 7, in mezzo al sette scrive una piccola "e"…)
Classe: «No! Non in mezzo al 7! Dopo il 7, in mezzo!»
Insegnante (scrive 7 e 0): «… è così?»
Classe: «Sì!»
Insegnante: «Ah! E dopo?»
Valeria: «Scrivi 2 e 5»
Insegnante: «Perché?»
Valeria: «Scrivi 2 e 5 sulla freccia dopo»
Insegnante: «Così?»
Valeria: «Sì»





I protocolli ottenuti mettono in evidenza che gli allievi giocano un ruolo che non è quello di apprendere, ma di eseguire, di saper disegnare ed accettare lo schema *a sole* proposto dall'insegnante. Questa esperienza didattica rappresenta per l'allievo «una situazione cognitivamente così semplice, che egli vi gioca subito da vincente: impara presto che il suo *mestiere da allievo* è capire quel che si vuole da lui, non costruire conoscenza. Se si rivela socialmente vincente il banale fatto che egli dica 1, 2, 3 di fronte ad insulsi disegnini, lui imparerà a farlo» (AA. VV., 2004, pag. 51).
A questo riguardo siamo convinti che sia necessario chiedersi come insegnanti se, per avviare l'allievo all'apprendimento del concetto di numero nelle sue varie interpretazioni e caratteristiche, sia prima di tutto necessario passare attraverso l'uso dei *numeri in colore*, ed in secondo luogo sia necessario far vivere agli allievi un eserciziario che risulta spesso ripetitivo, sterile, artificioso e spersonalizzato, cioè distante dalla realtà e dal vissuto dell'allievo (D'Amore, 2002b).
«C'è una vera costruzione di apprendimento concettuale solo se si è coinvolti responsabilmente in tale costruzione; e questo può avvenire solo se quel che si offre come contenuto di riflessione, di scoperta, di sistemazione, è confacente al bisogno di chi apprende. I numeri (naturali) in fila, uno per uno, a partire da uno (sì, perché lo zero è trattato misteriosamente, lasciato a lungo in disparte) fino a nove, non possono riempire significativamente un anno scolastico, fanno parte di un bagaglio di conoscenze già conquistato. Se i contenuti dell'insegnamento sono o troppo distanti dalle necessità problematiche dell'apprendente o troppo banali, il processo rischia di non funzionare, è quasi certo che non funzionerà» (D'Amore, 2007a).
Nelle parti di discussione sopra riportate, alle sollecitazioni dell'insegnante sulla giustificazione del loro operato e sulle loro conoscenze sino lì formate, gli allievi giustificano le loro risposte motivandole come adeguate a quelle che la maestra pretende. Accade che l'allievo «dopo qualche tentativo di mettere in campo le sue vere competenze, accetterà di riconoscere e soddisfare le "attese dell'insegnante"; è la definizione di "contratto didattico"» (AA.VV., 2004, pag. 51). Il contratto didattico è posto come un principio ineludibile di ogni situazione didattica e dipende dalla ripetizione più o meno consapevole delle abitudini didattiche personali dell'insegnante, nei confronti di un certo

gruppo di allievi e intorno ad un definito insieme di conoscenze disciplinari da insegnare: «ciò che il maestro riproduce, coscientemente o no, in modo ripetitivo nella sua pratica di insegnamento» (Brousseau, 1980a, pag. 127). A sua volta la ripetizione di prassi didattiche permetterebbe all'allievo di interpretare e soddisfare le attese dell'insegnante, ma a questo punto senza generare necessariamente nuovi saperi. È nella rottura del contratto didattico della situazione didattica corrente e nella costruzione di una nuova situazione che stanno le condizioni per migliorare e favorire l'apprendimento di ciascun allievo. «L'apprendimento non è più considerato come il risultato del soddisfacimento delle esigenze, anche implicite, del contratto didattico, ma procede, al contrario, da una rottura di quest'ultimo: imparare implica per lui (l'allievo) rifiutare il contratto ma accettare la presa a carico del problema. Infatti, l'apprendimento poggia non sul buon funzionamento del contratto, ma sulle sue rotture» (Sarrazy, 1998, pag. 145).
Se le attività con i *numeri in colore* sono articolate in "situazioni didattiche"[5] (proposte a volte per prassi abitudinaria) l'insegnante rischia di rimanere legato ai meccanismi del contratto didattico sopra accennati e di non far raggiungere agli allievi l'apprendimento concettuale dei numeri tanto sperato. Ma come si potrebbe "rompere" il contratto didattico?
L'uso critico del materiale dei regoli Cuisenaire-Gattegno potrebbe nascere proprio da una discussione collettiva in aula simile all'esperienza condotta con questi allievi di classe prima. Nella discussione si ha infatti la possibilità di far emergere le conoscenze degli allievi, ma anche le loro eventuali misconcezioni. Da queste l'insegnante potrebbe agire didatticamente per attivare un conflitto cognitivo negli allievi e sollecitare delle modifiche al loro processo di concettualizzazione del numero, anche facendoli sentire meno condizionati dalle caratteristiche dominanti percettive del materiale stesso (per esempio colore e grandezza).

Insegnante: «Ma questo perché dite che è 7?»
Gaia: «Perché arriva fino a 7»
Insegnante (avvicina 7 regoli neri al regolo arancione con scritti i numeri mostrando l'incoerenza fra grandezza e numerosità): «E questi arrivano fino a 7?»
Gaia: «No! Sono di più!»
Insegnante: «Ah! Sono di più! Perché sono di più?»
Valeria: «Perché sono tanti»
Insegnante: «Allora dove ne ho tanti, qua (1 regolo) o qua (7 regoli)?»
Classe: «Là!» (7 regoli)
Insegnante: «Ma prima avevate detto che anche qui ce ne erano sette» (1 regolo nero)
Valeria: «Quello è il 7, il regolo nero, là sono 7 neri»
Insegnante: «Chi è d'accordo con Valeria?»

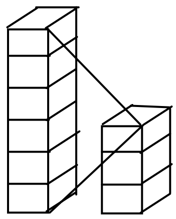
[5] Sulla teoria delle situazioni di Brousseau si veda: Brousseau 1988, 2000, 2005.

Classe: «Io! Io! …Sì! » (Tutti)

In questa fase della discussione, in cui si è messa in crisi l’associazione grandezza-quantità, è importante cogliere le risposte degli allievi per agire didatticamente rilanciando la sfida cognitiva:

- proponendo altri oggetti e lavorando non sulla dimensione ma sulla cardinalità: «Sono di più 3 libri o 5 caramelle?»;
- cambiando la convenzione dell’unità di misura: «E se il regolo bianco invece di valere 1, valesse 2?», «E se prendessimo un’altra unità di misura al posto del regolo bianco?», mostrando che quel regolo nero non rappresenta il 7 in assoluto;
- utilizzando altro materiale non strutturato per la misura: stecchini, pacchetti di fazzoletti, spaghi ecc.;
- ampliando l’uso dei numeri nella loro funzionalità, alla ricerca dell’uso dei numeri nella realtà: a questo punto il regolo reggerebbe ancora?

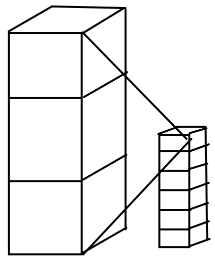
Un’altra considerazione importante da sottolineare è che, di solito, fin dalla prima primaria vengono introdotti i simboli di maggiore e minore in matematica (>, <); per far intuire come disporli, vengono messi ad esempio 6 regoli da 1 cubetto da una parte e 3 regoli da 1 cubetto dall’altra;



è vero che 6>3 e che la “punta” del simbolo è rivolta verso il più “piccolo”, ma questa proposta, se rafforzata con analoghi esempi, fornisce non solo una misconcezione sull’uso del simbolo ma, più in generale, alimenta la misconcezione che “a misura maggiore debba corrispondere numerosità maggiore”. L’immagine sopra riportata è spesso interpretata nel senso che alla colonna più “alta” debba corrispondere numerosità maggiore: «Sono di più di qua, per forza… è più alta»; tale convinzione è rafforzata dall’uso massiccio di regoli che sono strutturati proprio in questo modo.

Questa misconcezione può essere ampliata mostrando controesempi all’immagine sopra riportata, utilizzando oggetti di dimensioni diverse, che mettono in evidenza l’indipendenza della numerosità dalla grandezza.

Se si considerano 3 elefanti e 6 formiche non è più vero che la “punta” del simbolo debba essere rivolta verso gli elementi più voluminosi; i 3 elementi rappresentati nella seguente figura nella colonna di sinistra (rispetto al lettore), pur avendo altezza, estensione, volumetria maggiore dei 6 elementi della colonna di destra, sono numericamente meno, quindi il segno di maggiore, così com’è stato disposto, risulta scorretto.



Vanno quindi strutturate significative situazioni che mettono in risalto che i simboli matematici di maggiore e minore (>, <) vanno interpretati in senso numerico e non sono invece legati alla misura degli oggetti: la loro altezza, la loro estensione, il loro volume ecc.
Didatticamente converrebbe far contare insiemi formati da oggetti di tipologia e dimensioni diverse, far costruite "istogrammi" non convenzionali con oggetti diversi come forma e dimensione, per fare così intuire che la numerosità non dipende dalla misura degli oggetti. Successivamente, quando il concetto di numero si sarà formato nella mente degli allievi, si potranno proporre situazioni particolari come gli istogrammi convenzionali e i regoli formati da moduli unitari.
Queste considerazioni vertono nel far capire come, dietro buone intenzioni, vi sia a volte il rischio di errori formidabili e di misconcezioni.

3.5 L'"effetto Dienes"

Infine, l'applicazione acritica delle proposte didattiche di Gattegno, ponendo massima fiducia sull'efficacia dell'articolazione delle attività suggerite nelle proposte editoriali, senza adattarle e contestualizzarle ai bisogni e alle istanze di apprendimento degli allievi, crediamo faccia emergere problemi nel rapporto dell'insegnante al sapere. Infatti, l'uso del materiale strutturato come i regoli Cuisenaire-Gattegno, potrebbe portare ad un tipo di *disfunzionamento della relazione didattica* (si veda in Martini, 2000) molto simile a quello che Brousseau ha chiamato "effetto Dienes". In questo senso, c'è da parte dell'insegnante una sorta di deresponsabilizzazione nei confronti dei propri allievi, nel momento in cui applica (ed abitualmente usa) una proposta didattica suggerita da un esperto o da un autore.
Con "effetto Dienes" Brousseau intende determinati comportamenti che l'insegnante assume in rapporto al sapere e al sapere da insegnare. L'effetto Dienes si caratterizza nella seguente tipologia di comportamento: «più il professore confiderà nella riuscita grazie a degli effetti indipendenti dal suo investimento personale, più fallirà…» (Brousseau, 2000, pag. 19).
Analizzando il materiale strutturato e le proposte didattiche di Dienes, Brousseau ha elaborato una critica al loro uso arrivando ad affermare che: «il metodo didattico di Dienes, centrandosi sul "processo psicodinamico", non lascia di fatto all'insegnante altro spazio che la scelta dei materiali, la presentazione delle schede, gli incoraggiamenti al loro uso… Il metodo deve

operare in virtù di un processo interno del soggetto ineluttabile dal momento in cui le condizioni di entrata sono soddisfatte: presentazione ripetuta dei giochi strutturati, richiesta di schematizzazione ecc. Esso libera così il maestro dalla responsabilità tecnica di ottenere lui stesso l'apprendimento sperato. Egli può presentare i suoi esercizi, aspettare, … fornire eventualmente le risposte accompagnate da una breve spiegazione, rinviare alla scheda seguente, organizzare il gioco corrispondente… ma il contratto d'insegnamento non lo lega più all'evoluzione del comportamento cognitivo che il "gioco" si suppone prenda in carico. Al contrario, egli deve lasciare che l'allievo pensi da solo. Ora, i giochi di Dienes troppo spesso non sono soddisfacenti perché essi presuppongono che le regole proposte all'allievo (per giocare) siano le stesse che egli deve apprendere, la struttura del gioco e quella del sapere sono identiche! Così la comprensione della regola, condizione per agire, esige preliminarmente, da parte dell'allievo, la conoscenza stessa che si pretende di insegnargli. Se l'insegnante insegnasse subito la regola, il gioco si trasformerebbe in un esercizio. Per evitare ciò, egli cerca di far indovinare la regola – attività che non è teorizzata nel processo psicomatematico –» (Brousseau, 2000, pagg. 17-18).
Ritornando all'esperienza con i *numeri in colore* sopra descritta crediamo che l'allievo sia indotto ad accettare «…questo stato di cose, quale che sia il tipo di *situazione* nella quale si trova a vivere questi suoi primi contatti con il mondo della scuola, dato che non può fare altro. La sua situazione non gli permette di mettere in campo le proprie esperienze. Sappiamo bene che il suo *sapere personale* deve compiere un lungo processo prima di essere istituzionalizzato (Chevallard, 1989) e non è detto che lo sarà mai; c'è sempre, in effetti, il pericolo della *scolarizzazione dei saperi*» (AA.VV., 2004, pag. 51).
Ma allora, perché viene usato il materiale dei regoli Cuisenaire-Gattegno ancora oggi molto diffusamente nella scuola primaria in modo acritico (ma anche nell'ultimo anno della scuola dell'infanzia, assieme ai blocchi logici, e nella scuola secondaria di primo grado, soprattutto nelle situazioni di disagio di apprendimento)? Cuisenaire ha pubblicato le sue prime idee su questo materiale nel 1931 e Gattegno ha in seguito elaborato una serie di proposte didattiche sul loro uso (si veda ad esempio Gattegno, 1962, 1966, 1967). È per l'autorevolezza di chi li ha proposti? È per la bontà-efficacia del loro uso? È per abitudine culturale-didattica? È perché il contesto sociale e culturale si aspetta il loro uso?
«Il destino del fraintendimento e dell'esagerazione acritica, della perdita dell'evidenza della motivazione didattica che sta all'origine di un'idea e di uno strumento, sembra essere comune a molte delle innovazioni che ho considerato facenti parte della didattica **A**, forse proprio a causa del fatto che sia i proponenti sia gli adepti non avevano alle spalle i risultati di una ricerca didattica sugli effetti cognitivi in relazione alle modifiche degli apprendimenti ottenute con lo strumento; la fiducia derivava dallo strumento in sé, dal grado di convincimento operato dal proponente, dal consenso che ruotava, a tutti i

livelli, attorno alle proposte» (D'Amore, 1999, pag. 43).

4. Conclusione

Con questo articolo abbiamo voluto mettere in evidenza come l'uso acritico da parte dell'insegnante di materiali strutturati, in particolare i regoli in colore Cuisenaire-Gattegno oggetto di questo articolo, possa essere rischioso e far sprecare ad insegnanti ed allievi prezioso tempo didattico. Può essere rischioso perché, come abbiamo osservato, è facile creare ostacoli didattici (che gli insegnanti dovrebbero invece evitare) al processo di concettualizzazione del numero e può far sprecare ad insegnanti ed allievi prezioso tempo didattico perché per realizzare queste attività si impiegano molte risorse in termini di materiali, tempo, energia fisica e mentale, costruzioni, disegni, elaborazioni scritte, che poi in genere, col progredire del curricolo matematico, si abbandonano definitivamente (di solito nella stessa classe prima). Inoltre tale tempo è speso a discapito di altre attività più vicine alla quotidianità dell'allievo e al concetto stesso di numero.
Vogliamo quindi invitare gli insegnanti a far lavorare gli allievi impiegando anche altre metodologie più vicine alle loro esigenze e competenze (si veda ad esempio Marazzani, 2007), tramite le quali è più facile non banalizzare gli apprendimenti e non correre i rischi di ostacolare didatticamente l'apprendimento degli allievi.
Facendo queste considerazioni non vogliamo però essere fraintesi: qualsiasi strumento va bene, purché alla fine gli allievi imparino più e meglio la matematica; vanno bene i numeri in colore, gli abaci, le conchiglie, la lavagna, la macchina calcolatrice, le dita delle mani, le palline colorate, il minicomputer di Papy, il quaderno, la matita, ... purché siano usati con saggezza.
L'importante è che ci si concentri sulla matematica e non sugli strumenti utilizzati e sulle loro caratteristiche percettive come colore, grandezza, disposizione, … o su eccessivi formalismi che molto spesso risultano vincolanti e forvianti rispetto al concetto che si vuole proporre.
L'obiettivo è la matematica, non lo strumento, invece a volte sembra che l'attenzione sia su quest'ultimo a discapito del sapere in gioco. Se gli strumenti vengono usati insieme a tante altre proposte, mostrandone per ciascuno le "debolezze" dal punto di vista matematico e lavorando con consapevolezza per favorire l'ampliamento di eventuali misconcezioni che possono essere emerse durante la discussione in classe, tramite controesempi e ben progettate situazioni, allora ben vengano gli strumenti come stimolo per una discussione efficace e critica.
Infine crediamo che, una volta scelto lo strumento, sia buona prassi didattica partire dalle idee e dagli usi possibili che gli allievi fanno ed escogitano; partire cioè dalle loro conoscenze, abilità e competenze in atto, piuttosto che da applicazioni abitudinarie di attività e schede di lavoro precostituite. Può

essere importante almeno per due ragioni: si permette all'insegnante di capire quali siano le misconcezioni degli allievi sui saperi matematici in gioco; si dà modo agli allievi di esprimere la loro creatività ed originalità. Creatività ed originalità dei singoli che possono essere mediate ed arricchite dagli altri attraverso la discussione e le attività di gruppo.

È proprio partendo dalle misconcezioni e dalla creatività degli allievi che l'insegnante ha la possibilità di interessarli, motivarli, implicarli nell'attività in atto e creare delle istanze di apprendimento per le quali le azioni didattiche dell'insegnante si modulano e si equilibrano. È qui che le nozioni e le procedure formali hanno senso, che le convenzioni trovano significato, dato che sono gli allievi stessi in prima persona che ne sperimentano il bisogno e ne scoprono i limiti; limiti che possono portare a loro volta a nuovi problemi, nuove istanze di apprendimento, nuove attività.

Lo scopo è creare una scuola che non sia il luogo dei saperi banali e ridondanti, senza sfide intellettuali, luogo della ripetizione e dell'imitazione, luogo da esercizi e non da problemi, ma luogo dove servano le competenze personali acquisite fuori dal mondo della scuola e dove l'allievo possa costruire competenza spendendosi in prima persona.

Bibliografia

Ausubel D. P. (1978). *Educazione e processi cognitivi*. Milano: Angeli.

AA. VV. (2004). Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all'aritmetica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 47-95.

Brousseau G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*. 101, 3-4, 107-131.

Brousseau G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*. 41, 177-182.

Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*. 9, 3, 309-336.

Brousseau G. (2000). *Elementi per una ingegneria didattica*. Bologna: Pitagora.

Brousseau G. (2005). Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 297-324.

Brousseau G., Péres J. (1981). Le cas Gaël. *Université de Bordeaux*. I, Irem.

Castelnuovo E. (1950). *Geometria intuitiva*. Firenze: La Nuova Italia.

Castelnuovo E. (1982). *Didattica della matematica*. Firenze: La Nuova Italia.

Chevallard Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Grenoble*. Irem d'Aix de Marseille.

Dienes Z. P. (1970). *Pensiero in strutture*. Firenze: O. S.

Dienes Z. P. (1972). *La mathématique vivante*. Paris: OCDL.

Dienes Z. P. (1975a). *Costruiamo la matematica*. Firenze: O. S.

Dienes Z. P. (1975b). *La matematica moderna nell'insegnamento primario*. Firenze: O. S.

D’Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D’Amore B. (2001). *Scritti di epistemologia matematica*. Bologna: Pitagora.
D’Amore B. (2002a). Basta con le cianfrusaglie! *La Vita Scolastica*. 8, 1, 14-18.
D’Amore B. (2002b). L’uso acritico degli strumenti! *La Vita Scolastica*. 16, 1, 15-19.
D’Amore B. (2006a). Didattica della matematica “C”. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent’anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 93-96.
D’Amore B. (2006b). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, 557-583.
D’Amore B. (2007a). Presentazione di: Marazzani I. (ed.) (2007). *I numeri grandi*. Trento: Erickson.
D’Amore (2007b). Lo zero, da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica*. 4, 425-454.
D’Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell’idea di “misconcezione”. *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.
Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 5, 37-65.
Duval R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*. 4, 585-619.
Gagné E. D. (1989). *Psicologia cognitiva e apprendimento scolastico.* Torino: SEI.
Gattegno C. (1962). *Mathématiques avec les nombres en couleurs. Les nombres jusqu’à 1000. Procédés de calcul*. Paris: Delachaux et Niestlé.
Gattegno C. (1966). *Mathématiques avec les nombres en couleurs. Les nombres de 1 à 20 et jusqu’à 100*. Paris: Delachaux et Niestlé.
Gattegno C. (1967). *L’Arithmétique avec les nombres en couleurs. Les unités de mesure et le système métrique*. Paris: Delachaux et Niestlé.
Marazzani I. (a cura di). (2007). *I numeri grandi.* Trento: Erickson.
Martini B. (2000). *Didattiche disciplinari. Aspetti teorici e metodologici*. Bologna: Pitagora.
Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid.
Montessori M. (1971). *Psicoaritmetica*. Milano: Garzanti.
Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed educazione matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1. 43-59.
Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.
Sarrazy B. (1998). Il contratto didattico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 132-175.
Sbaragli S. (2005). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica*. 1, 57-71.